"常微分方程"2015-2016下学期期末测试

2016年6月25日 8：30-10：30

注意. 答题务求详细、完整、严谨、条理清晰,答题卡上写清姓名、专业、学号。 试题共两页。

习题一. 本题研究如何用特征线法求解传输方程的初值问题。

(a) 求解如下给出的一阶常微分方程组的初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(s)}{ds} = 1, \quad x(0) = x_0. \\ \dfrac{dy(s)}{ds} + 2y(s) = 8e^{-10x(s)}, \quad y(0) = y_0. \end{cases}$$

其中 x_0, y_0 为已知数, $x(s), y(s)$ 为待求的未知函数。

(b) 求下面传输方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \left(8e^{-10x} - 2y\right)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x + y. \tag{1}$$

的特征线 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, 其中 $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ ， 并且证明

$$\frac{d}{ds}\Big(u\left(\gamma(s)\right)\Big) = x(s) + y(s). \tag{2}$$

(c) 利用公式(2)以及公式

$$f(a) - f(b) = \int_b^a f'(t)dt,$$

求解下面方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \left(8e^{-10x} - 2y\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x + y, \\ u(0,y) = 3y \end{cases}$$

的解 u 的表达式。

习题二. 本题求解二阶常微分方程初值问题.

(i) 求解如下齐次问题的解

$$y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

(ii) 利用 Laplace变换求解如下非齐次零初值问题的解

$$y''(t) + y(t) = g(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

其中

$$g(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t \le 2\pi, \\ 0, & t > 2\pi. \end{cases} \tag{3}$$

已知 $\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{s^2+1}$, 这里 $\mathcal{L}$ 代表 Laplace 变换。

(iii) 求解

$$y''(t) + y(t) = g(t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2, \tag{4}$$

其中 $g(t)$ 由(3) 所给出。

(iv) 假设 $y(t)$ 满足方程

$$y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0. \tag{5}$$

令 $\phi(t) = y'(t), \psi(t) = y(t)$. 证明

$$\begin{cases} \phi'(t) = -\psi(t), \\ \psi' = \phi, \\ \phi(0) = \psi(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

(v) 定义一列函数如下： $\phi_0 = \psi_0 = 0$,

$$\phi_j(t) = -\int_0^t \psi_{j-1}(s)\, ds, \quad j \ge 1,$$
$$\psi_j(t) = \int_0^t \phi_{j-1}(s)\, ds, \quad j \ge 1.$$

证明

$$\lim_{j\to+\infty} \phi_j = \lim_{j\to+\infty} \psi_j = 0.$$

(vi) 利用 (iv) 以及 (v) 的结论证明方程组 (6) 仅有唯一解 $\phi = \psi \equiv 0$, 从而证明方程(5) 仅有一个解 $y = 0$.

(vii) 利用(vi) 中的结论，证明方程(4)的解是唯一的。