"常微分方程"2013-2014下学期期末考试

2014年6月22日 8：30-10：30

注意. 答题务求详细、完整、严谨、条理清晰，答题卡上写清姓名、专业、学号。 试题共两页。

习题一($10' \times 4$). 求解下面齐次问题的通解或者初值问题。

(1) $y'' - y = 8te^t + 2e^t$. (2) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$.

(3) $y'' + 2y' - y = 0, \quad y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

(4) $(1 + e^x y + xe^x y)dx + (xe^x + 2)dy = 0, \quad y(0) = 1$

习题二(40'). 在力学问题中，我们经常会遇到下面形式的微分方程

$$y'' + py' + qy = f(t), \tag{1}$$

其中p, q为正常数并且满足关系式$p^2 < 4q$, $f(t)$代表外力项。在很多情况下(例如发动机设计)，研究外力函数$f(t)$的大时间性态如何影响解的近似形态是非常重要的。我们通过下面几个步骤来回答这个问题

(a) 证明方程(1)对应的齐次问题有两个线性无关解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

其中 $\alpha = -p/2 < 0$, $q = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$.

(b) 假设 $f(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数。利用参数变分公式证明方程(1)在 $[0, +\infty)$ 上的通解为

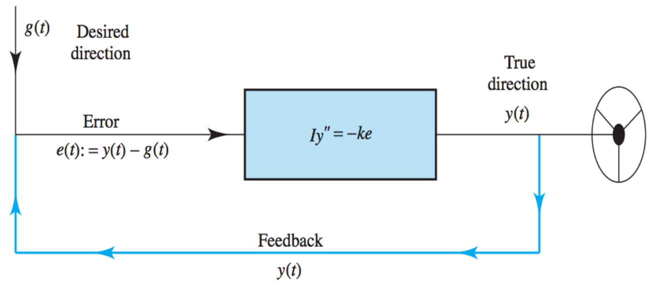
$$\begin{aligned} y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t - \frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\cos\beta t \int_0^t f(v)e^{-\alpha v}\sin\beta v\, dv \\ + \frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t \int_0^t f(v)e^{-\alpha v}\cos\beta v\, dv. \end{aligned} \tag{2}$$

(c) 假设 $f(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的有界连续函数，即存在一个常数 $K > 0$ 使得对任意的 $v \in [0, +\infty)$ 均有 $|f(v)| \le K$. 证明由(2)给出的解 $y(t)$ 满足下面性质：

$$\forall\, t > 0, \quad |y(t)| \le (|c_1| + |c_2|)\, e^{\alpha t} + \frac{2K}{|\alpha|\beta}(1 - e^{\alpha t}).$$

TABLE 7.1 Brief Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
$e^{at} t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$



(d) 假设 $f_1(t), f_2(r)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的两个有界连续函数，并且满足条件： $\forall\, t > t_0$ 均有 $\big|f_1(t) - f_2(t)\big| \le \epsilon$. 令 ϕ_1 是方程 (1) 外力项为 f_1 时的解，ϕ_2 是方程 (1) 外力项为 f_2 时的解。 证明由(2)给出的解 $y(t)$ 满足下面性质：

$$\forall\, t > t_0, \quad \big|\phi_1(t) - \phi_2(t)\big| \le M e^{\alpha t} + \frac{2\epsilon}{|\alpha|\beta}(1 - e^{\alpha(t-t_0)}),$$

其中 M 是一个常数，它依赖于 ϕ_1, ϕ_2, 但是不依赖于 t.

(e) 现在假设方程(1) 的外力项 $f(t)$ 满足条件： $\lim_{t\to+\infty} f(t) = F_0$, 其中 F_0 是一个常数。利用 (d) 中的结论证明方程(1)的任意解 ϕ 满足条件

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = \frac{F_0}{q}.$$

习题三(20'). (飞机或者轮船的)自动导航系统是通过控制转向控制轴的扭矩，使得飞机或者轮船按照预定的航线行驶。如果我们令$y(t)$代表真实的航线(true direction)，$g(t)$代表预定的航线(desired direction)，则

$$e(t) = y(t) - g(t)$$

代表真实航线和预定航线之间的偏差。先假设自动控制系统可以检测到偏差并且反馈给转向轴扭矩的一个平行于$e(t)$的组成部分。对于扭矩而言，牛顿第二定律可以表述为：

惯性力矩$\times$ 角度加速度=总扭矩

对自动导航系统而言(见上图)，我们可以表述为：

$$Iy''(t) = -ke(t),$$

其中 I 是转向轴的惯性力矩，k 是一个正的常数。

假设转向轴在初始时刻($t = 0$) 没有运作并且处于0方向(即原方向)，假设预定航线由函数 $g(t) = a\,t$ 给定，其中 a 是一个常数。利用 Laplace 变换求解 $e(t)$。