''常微分方程''2014-2015下学期期末考试

2015年7月8日 8：30-10：30

注意. 答题务求详细、完整、严谨、条理清晰，答题卡上写清姓名、专业、学号。 试题共两页。

习题一 (50').

将容器里面的水通过底部的排水孔排空需要多长时间？ 考虑下图所给出的容器，其底部有一个很小的圆形排水孔：

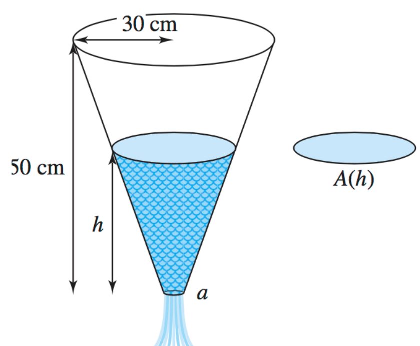

Figure 2.14 Conical tank

Torricelli 定律可以表述为： 如果水的上表面高度为 h, 则在出水孔处水流的速度与水滴从高度为 h 的地方自由落下(不考虑摩擦力)的着地速度是一样的。

(i) 利用牛顿第二定律公式

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g,$$

证明物体从 $h(0)$ 的高度做自由落体运动，其着地速度是 $-\sqrt{2gh(0)}$.

(ii) 令 $A(h)$ 代表高度为 h 处横截面的面积，a 代表底部出水孔的面积。 则容器水量的变化率可以由两种方式刻画：第一种是高度为 h 处的横截面面积乘以高度的变化率，第二种是出水孔面积乘以出水孔处的水流的速度。 利用 Torricelli 定律证明下面的关系式

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}.$$

(iii) 上图 (Figure 2.14) 中所给出的圆锥容器的上表面直径是 30 cm, 底部出水孔直径是 1 cm. 初始水面的高度是 $50cm$. 求 $A(h)$ 以及 a, 进而求解 $h(t)$.

(iv) 利用 (iii) 中的结论，计算容器的水完全排空需要多长时间？

(v) 与(iii) 的条件相同，并且假设容器的上表面也有一个直径为 1 cm 的圆形出水孔。 现在将圆锥容器翻转过来，求容器的水完全排空需要多长时间？

习题二(50') .

给定两个函数 g, h, 我们可以定义一个新的函数 $g * h$ 如下

$$g * h(t) = \int_0^t g(t-r)h(r)dr.$$

我们称 $g * h$ 为 g 和 h 的卷积函数. 本题的目的是利用卷积函数求解非齐次二阶常微分方程

$$ay''(t) + by' + cy = f(t),$$

其中 a, b, c 为常数并且 $a \neq 0.$

(a) 利用 Leibniz 公式

$$\frac{d}{dt}\int_0^t F(t,r)dr = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(t,r)dr + F(t,t),$$

证明下面的关系式:

$$\begin{aligned}(y * f)'(t) &= (y' * f)(t) + y(0)f(t),\\ (y * f)''(t) &= (y'' * f)(t) + y'(0)f(t) + y(0)f'(t).\end{aligned}$$

(b) 令 $y_s(t)$ 是下面齐次初值问题

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0,\\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{a}\end{cases}$$

的解。 证明 $y_s * f$ 满足如下非齐次初值问题

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t),\\ y(0) = y'(0) = 0.\end{cases}$$

(c) 令 $y_k(t)$ 是下面齐次初值问题

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0,\\ y(0) = Y_0,\ \ y'(0) = Y_1\end{cases}$$

的解， 并且令 y_s 是 由 (b) 中给出的解。 证明 $y_s * f + y_k$ 满足如下非齐次初值问题

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t),\\ y(0) = Y_0,\ \ y'(0) = Y_1.\end{cases}$$

(d) 利用 (c) 中的结论，求解如下初值问题的解：

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \sqrt{t}e^t,\\ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0.\end{cases}$$