”常微分方程”2016-2017下学期期末考试

2017年1月4日 2：00-4：00

注意. 答题务求详细、完整、严谨、条理清晰，答题卡上写清姓名、专业、学号。 试题共两页。

习题一 (60’). 利用Laplace变换求解如下常微分方程初值问题

$$y''(t)+4y'(t)-5y(t)=te^t;\quad y(0)=1,\ \ y'(0)=0, \tag{1}$$

这里 y', y''分别表示函数y的一阶、二阶导数。

(i) 记$F=\mathcal{L}(f)$ 代表函数f的Laplace变换，即 $\mathcal{L}(f)(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$. 假设 $f(0)=f'(0)=0$, 计算

$$\mathcal{L}\Big(f''+4f'-5f\Big),$$

也即将 $\mathcal{L}\left(f''+4f'-5f\right)$ 写成关于F 的表达式。

(ii) 求 $h(t)\overset{\text{定义}}{=}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s-5}\right)$, 其中$\mathcal{L}^{-1}$ 代表Laplace逆变换。

(iii) 假设h 由(ii)所定义。计算 $h*(te^t)$, 其中 $h*(te^t)=\int_0^t h(t-\alpha)\alpha e^{\alpha}d\alpha.$

(iv) 卷积定理可以表述为：$\mathcal{L}^{-1}\left(PQ\right)=p*q$, 其中 $\mathcal{L}^{-1}P=p, \mathcal{L}^{-1}Q=q$. 利用卷积定理以及(i)-(iii)中结论证明 $f=h*(te^t)$ 满足初值问题

$$f''(t)+4f'(t)-5f(t)=te^t;\quad f(0)=x'(0)=0.$$

(v) 求解齐次问题

$$x''(t)+4x'(t)-5x(t)=0;\quad x(0)=1,\ \ x'(0)=0$$

的解 $x.$

(vi) 求非齐次问题(1)的解$y(t).$

习题二(40’).

利用分离变量法求解如下偏微分方程边值问题，其中 $x=(x_1,x_2).$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}=0,\quad -\infty<x_1<+\infty, 0<x_2<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x_1,0)=0,\quad -\infty<x_1<+\infty, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0)=\frac{1}{n}\sin(nx_1),\quad -\infty<x_1<+\infty. \tag{4}$$

(a) 假设上述边值问题的解$u(x_1, x_2)$ 可以写成 $u(x_1, x_2) = v(x_1)w(x_2)$. 通过方程(2) 推导 $v(x_1)$ 和 $w(x_2)$的方程。

(b) 通过方程(3) 求 $w(0)$.

(c) 求w 的通解表达式.

(d) 利用方程(4)求解 w 与 v的表达式. 写出边值问题的解 u.

TABLE 7.1 Brief Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$
1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
$t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}, \quad s > 0$
$e^{at}t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$